

РАСЧЕТ ГРАНУЛОМЕТРИЧЕСКОГО СОСТАВА ЧАСТИЦ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ НАИБОЛЕЕ ПЛОТНОЙ УКЛАДКИ ИХ В СПЕКАЕМЫХ ИЗДЕЛИЯХ

В. М. БЕЛОУСОВ

(Представлено научным семинаром по диэлектрикам)

В порошковой металлургии, производстве керамических материалов и огнеупоров важное значение имеет наиболее плотная укладка частиц перед спеканием. Одним из критериев спекания по теориям Френкеля [1, 2] и Пинеса с сотрудниками [3—7] является степень закрытия пор между частицами. Препятствием полному закрытию пор может служить наличие газа в порах. При порах разных размеров может иметь место разрастание больших пор за счет уменьшения малых [5]. Одним из путей сведения к минимуму пористости спеченного изделия является предельное уменьшение зазоров между частицами перед спеканием, т. к. при этом наряду с уменьшением зазоров уменьшается и количество газа в этих зазорах.

В связи с этим вопросу о гранулометрическом составе частиц уделялось много внимания. Полубояринов и Грачева [8] дали широкий обзор работ в этом направлении и привели данные своих исследований. В их работе (а также во всех работах, цитируемых ими) эмпирически подбирались смеси частиц разных размеров, масса уплотнялась многократным встряхиванием (10000 раз), после чего определялся объемный вес. Попыток расчетного решения задачи о гранулометрическом составе частиц в литературе мы не нашли. В настоящей работе предпринята попытка такого решения.

1. Основной расчет

Пусть в нашем распоряжении имеется кубический ящик с ребром L и шары одинакового диаметра d , причем $d = \frac{L}{n}$, где n — целое

число. Заполним ящик так, чтобы линии касания шаров были параллельны ребрам куба, как изображено на фиг. 1. Предполагается, что все шары имеют одинаковую массу (плотность). В этом случае можно утверждать, что плотность укладки (объемный вес или просто вес ящика с шарами) не зависит от диаметра равных шаров.

Доказать это утверждение легко следующим образом. Опишем около каждого шара куб с ребром $l=d$. Объем большого кубического ящика

$$V_1 = L^3 = n^3 l^3, \quad (1)$$

объем всех шаров

$$V_2 = n^3 \cdot \frac{1}{6} \pi d^3. \quad (2)$$

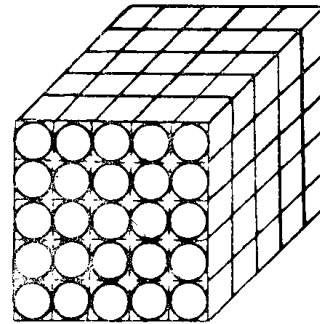
Отношение объема шаров к объему куба

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\pi}{6} = \text{const (не зависит от } n\text{)}.$$

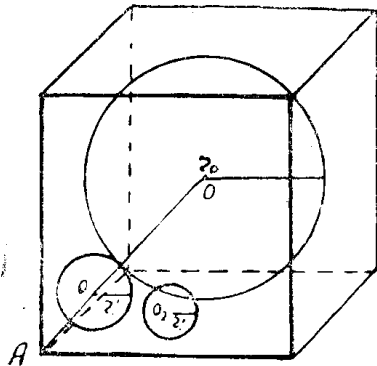
Так как малые кубы в большом (при условии $L = n l$) можно уложить абсолютно плотно, то при любом диаметре шаров $d = \frac{L}{n}$ (т. е. при любом целом числе n) плотность укладки не изменится.

Это положение позволяет свести расчет к заполнению малого куба с ребром $l=d$ шарами уменьшающихся радиусов. Схема заполнения приведена на фиг. 2.

Обозначим радиус наибольшего шара, центрального, равный половине ребра куба, через r_0 . Дальнейшему заполнению подлежат восемь углов куба. Радиус следующего по размеру шара, касающегося центрального шара и трех граней куба, обозначим r'_1 . Этот радиус легко связать с r_0 . Полудиagonalь куба $AO = r_0 \sqrt{3}$. По аналогии $AO' = r'_1 \sqrt{3}$. Из фиг. 2 очевидно, что $r'_1 = AO - AO' - r_0 = r_0 \sqrt{3} - r'_1 \sqrt{3} - r_0$, откуда



Фиг. 1.



Фиг. 2.

$$r'_1 = r_0 \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}. \quad (3)$$

Следующий угловой шар меньшего размера, касающийся шара радиуса r'_1 и трех граней куба, будет

$$r'_2 = r'_1 \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = r_0 \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \right)^2.$$

Угол куба будет заполнен рядом шаров с радиусами

$$r'_n = r_0 \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \right)^n \quad (4)$$

при n — как угодно большом.

Следующей значительной полостью, подлежащей заполнению, можно принять зазор против середины ребра куба. Радиус шара, касающегося центрального шара и граней двугранного угла куба,

обозначим r_1'' . Аналогично выводу формулы (3) получаем для этого радиуса

$$r_1'' = r_0 \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}. \quad (5)$$

Общая формула для последовательного ряда шаров, заполняющих двугранный угол против середины ребра, будет

$$r_n'' = r_0 \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right)^n. \quad (6)$$

Приблизительная относительная оценка радиусов шаров, заполняющих куб, приводит к следующим значениям:

$$\frac{r_1'}{r_0} = 0,268,$$

$$\frac{r_1''}{r_0} = 0,171.$$

Для подбора более мелких фракций можно использовать формулы (4) и (6). Используя формулу (4), можно получить, например:

$$\frac{r_2'}{r_0} = 0,072,$$

$$\frac{r_3'}{r_0} = 0,019$$

и т. д.

Подсчитывая число шаров соответствующего размера, можно вычислить относительную массу каждой фракции. Например, первые четыре фракции можно оценить из следующих соображений: для заполнения куба с ребром l потребуется один шар радиуса r_0 , восемь шаров радиуса r_1' , двенадцать шаров радиуса r_1'' , оставшиеся зазоры можно заполнить более мелкими фракциями (пыль). Тогда:

- 1) фракция шаров радиуса r_0 должна составить 52,3%,
- 2) " " " " r_1' " " 8,1%,
- 3) " " " " r_1'' " " 3,2%,
- 4) Более легкие фракции (включая пыль) 36,4%.

2. Некоторые уточнения по поводу промежуточных фракций

Шары радиуса r_1' заполняют наибольшие зазоры между стенками куба и шаром радиуса r_0 . При расположении больших шаров в порядке, приведенном на фиг. 1, требуется заполнять зазоры между шарами, значительно большие, чем в рассмотренном выше случае. При меньшей общности расчета и в этом случае можно вычислить радиусы шаров двух промежуточных фракций.

Расположим восемь шаров радиуса r_0 внутри куба с ребром $4r_0$. Наибольший зазор будет в центре куба. Радиус шара r_1 , касающегося всех восьми больших шаров, легко вычислить:

$$\frac{r_1}{r_0} = \sqrt{3} - 1 \approx 0,732. \quad (7)$$

Шар следующей по размеру фракции должен касаться двух соседних шаров радиуса r_1 , расположенных в центрах двух соседних кубов. Обозначим этот радиус r_2 . Легко убедиться, что

$$\frac{r_2}{r_0} = 2 - \sqrt{3} \approx 0,268. \quad (8)$$

Таким образом, это уточнение позволило ввести дополнительную промежуточную фракцию шаров радиуса r_1 .

Относительную массу четырех фракций в этом случае приблизительно можно рассчитать из следующих соображений. Построим куб, вершины которого будут находиться в центрах больших шаров. Внутри куба окажутся по одной восьмой от каждого шара радиуса r_0 , один шар радиуса r_1 и шесть половинок шаров радиуса r_2 . Остальные зазоры подлежат заполнению более мелкими фракциями. Вычисление относительной доли каждой фракции дает:

фракция шаров радиуса r_0	52,3%
" " " r_1	20,5%
" " " r_2	3,0%
Более мелкие фракции	24,2%

Таким образом, введение дополнительной промежуточной фракции, имеющей значительную относительную массу, изменило соотношение мелких фракций. Фракция шаров радиуса r_1 , не учтенная в расчете § 1, входит в значительном количестве — 20,5%.

3. Оценка фракций при наиболее плотной укладке первой фракции шаров

Естественно ожидать, что шары первой фракции радиуса r_0 при условии скольжения без трения после встряхивания уложатся друг относительно друга наиболее плотно. Известными способами наиболее плотной укладки шаров одинакового размера являются взаимные расположения, соответствующие кристаллографическим решеткам гексагональной и кубической пространственно-центрированной.

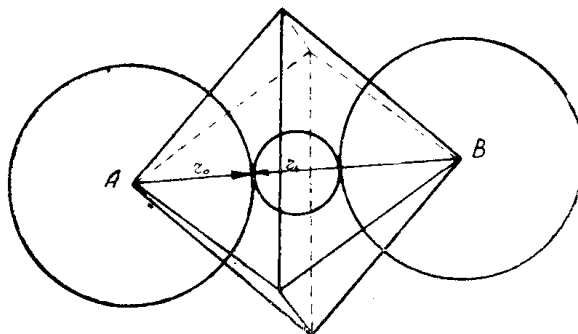
Известно из литературы, что в этих случаях большие шары занимают 74% пространства, причем на каждый большой шар приходится по одной большой полости и по две малых [9]. Наиболее просто можно рассчитать размеры частиц и количество фракций для кубической пространственно-центрированной решетки.

Большие полости образуются между шестью соседними шарами радиуса r_0 , центры которых лежат в вершинах октаэдра. Каждое ребро октаэдра равно $2r_0$. Диагональ октаэдра AB на фиг. 3 равна $2r_0 + 2r_1$, где r_1 — радиус шара, заполняющего большую полость

и касающегося всех шести больших шаров. Диагональ октаэдра, с другой стороны, равна: $AB = 2r_0\sqrt{2}$, поэтому

$$\frac{r_1}{r_0} = (\sqrt{2} - 1) \approx 0,414. \quad (9)$$

Малые полости заключены между четырьмя шарами радиуса r_0 , центры которых лежат в вершинах тетраэдра. Шар радиуса r_2 , центр

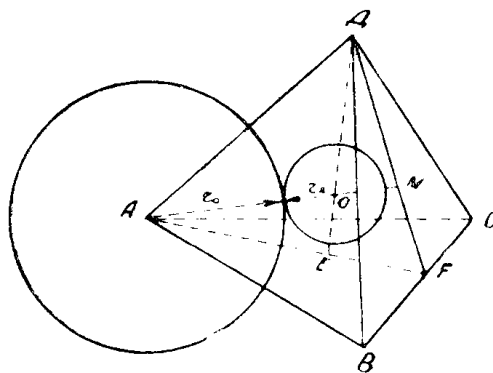


Фиг. 3

которого совпадает с центром тетраэдра, должен касаться четырех шаров радиуса r_0 . Расстояние от вершины тетраэдра до центра равно

$r_0 \sqrt{\frac{3}{2}}$. Это расстояние, по фиг. 4, равно $r_0 + r_2$. Следовательно,

$$\frac{r_2}{r_0} = \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \approx 0,225.$$



Фиг. 4.

По соотношению количества шаров можно приблизительно оценить фракции для заполнения пространства:

фракции шаров радиуса r_0	74%
" " " r_1	5%
" " " r_2	2%
более мелкие фракции (включая пыль) 19% .	

4. Результаты расчетов и их соответствие известным данным по подбору гранулометрического состава

Расчет размеров частиц для заполнения зазора между поверхностью шара и гранями описанного куба обладает наибольшей общностью. Формулы (4) и (6) позволяют вычислять радиусы последовательно уменьшающихся по размеру шаров для любого числа фракций. Сомнение вызывают два обстоятельства: 1) при системе укладки шаров, изображенной на фиг. 1, имеются полости более значительные, чем наибольший зазор, заполняемый шаром радиуса r'_1 (см. фиг. 2); 2) при укладке шаров r_0 без трения наиболее вероятно их расположение, соответствующее наибольшей плотности. Первый вопрос рассмотрен в § 2, второй — в § 3. Уточнение расчетов в § 2 привело к дополнительной по размерам промежуточной фракции шаров, рассчитываемой по формуле (7), доля которой при заполнении объема значительна—20,5%, в то время как промежуточные фракции в расчете § 1 входят в незначительных количествах. Расчет § 3, произведенный на основе наиболее плотного расположения шаров радиуса r_0 , приводит к преобладающей доле больших шаров и малым долям промежуточных фракций. Но расчеты § 2 и 3, в отличие от первого варианта расчета, не обладают общностью, вычисление радиуса шаров четвертой по размеру фракции уже наталкивается на большие трудности.

Ответ на вопрос, какому из расчетов отдать предпочтение, должны дать опытные данные по подбору гранулометрического состава, обеспечивающего наиболее плотную сыпку. Данные, приведенные в работе Полубояринова и Грачевой [8], не могут дать прямого ответа, потому что, во-первых, каждая из ссыпаемых фракций имела в своем составе различные по размеру частицы в некоторых границах, во-вторых, эмпирическим подбором состав фракций по размерам, соответствующий наиболее плотной укладке, мог быть не угадан. Но иных данных в нашем распоряжении нет, поэтому до специальной экспериментальной проверки можно ориентировочное сравнение провести с эмпирическими данными этой работы.

Полубояринов и Грачева подбирали в разных пропорциях для синтетической смеси три фракции частиц по размерам, причем третья фракция состояла из смеси частиц начиная с некоторого наибольшего размера до мельчайшей пыли. Наибольшая плотность получена при трех вариантах гранулометрического состава крупного шамота в пропорциях, приведенных в таблице 1.

Т а б л и ц а 1

№ № масс	Крупная фракция 5—2 мм в %	Средняя фракция 2—0,5 мм в %	Мелкая фракция 0,5 мм в %	Объемный вес в г/см ³
26	50	—	50	1,94
21	40	10	50	
20	50	10	40	

Для мелкого шамота наибольшая плотность получена при долях фракций, приведенных в таблице 2.

Если за величину зерен каждой фракции принять среднее значение, т. е. считать в первой таблице $r_0 = 3,5$ мм, $r_1 = 1,25$ мм и

$r_2 = 0,5 \text{ мм}$, то $\frac{r_1}{r_0} = 0,36$ и $\frac{r_2}{r_0} = 0,14$. Принимая соответственно для мелкого шамота во второй таблице $r_0 = 1,25 \text{ мм}$, $r_1 = 0,3 \text{ мм}$, $r_2 = 0,1 \text{ мм}$, получим $\frac{r_1}{r_0} = 0,24$ и $\frac{r_2}{r_0} = 0,08$. В расчете фракций § 1 получены соотношения:

$$\frac{r'_1}{r_0} = 0,268; \quad \frac{r''_1}{r_0} = 0,171; \quad \frac{r'_2}{r_0} = 0,072.$$

Полного соответствия ожидать нет оснований, т. к. каждая фракция включает частицы, различающиеся по размеру в 4—5 раз. Среднее значение размеров—условная характеристика. Кроме того, частицы не имеют шарообразной формы. Тем не менее некоторые размеры находятся в хорошем соответствии с расчетными данными, особенно фракции мелкого шамота. Доли фракций в смесях удовлетворительно согласуются с расчетом, приведенным в § 1.

Т а б л и ц а 2

Крупная фракция 2—0,5 мм в %	Средняя фракция 0,5—0,1 мм в %	Мелкая фракция 0,1 мм в %	Объемный вес
60	10	30	1,76—1,75
50	20	30	

Полубояринов и Грачева в выводах отмечают, что максимальная плотность укладки получается при достаточном количестве мелких фракций и достаточно широком интервале между величиной зерен наиболее мелких и наиболее крупных фракций при незначительном содержании средних; средние фракции частиц можно без ущерба выбросить.

Это находится в хорошем соответствии с расчетными данными § 1: крупная фракция должна составлять 52,3%, средние фракции должны входить в незначительных количествах (8,1% и 3,2%). Уточнение расчета, проведенное в § 2, дало дополнительную среднюю фракцию $\frac{r_1}{r_0} = 0,732$, которая должна составлять 20,5%. В табл. 1 и 2 нет соответствующей фракции, но в работе Полубояринова и Грачевой приведены еще три варианта наиболее плотных сыпков, из которых две содержат по восемь фракций, а одна—шесть фракций (исключены две средних), причем вторая по крупности фракция имеет относительные размеры частиц $\frac{r_1}{r_0} = 0,78$ и входит в количествах 17% (в двух случаях) и 13% (в одном случае).

Набора фракций из числа наиболее плотно уложенных частиц, соответствующих расчету § 3, ни в опытах Полубояринова и Грачевой, ни в цитируемых ими работах Фуллера, Сколы, Линцова и Рикке нет. По-видимому, этот способ укладки практически не реализуется.

Объяснить это можно тем, что частицы скользят при взаимном перемещении с трением, причем интенсивнее перемещаются при многократном встряхивании мелкие частицы и раньше, чем крупные ча-

стицы успеют уложиться в порядке их наиболее плотного расположения (центрированный куб или гексагональная система), мелкие частицы заполнят все пустоты и парализуют подвижность крупных.

Таким образом, расчет, приведенный в § 1, с уточнением, выполненным в § 2, может служить основанием для расчета гранулометрического состава мелких частиц для формирования (формовка, прессовка, литье разжиженной массы и т. д.) перед спеканием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я. И. Вязкое течение в кристаллических телах. ЖЭТФ, **16**, 29, 1948.
2. Френкель Я. И. Введение в теорию металлов. Издание второе, Гостехиздат, М.-Л., 1950.
3. Гегузин Я. Е., Моркон Л. О., Пинес Б. Я. Самодиффузия и вязкое течение (спекание и крип) у спрессованных металлических порошков. ДАН СССР, **27**, 577, 1952.
4. Пинес Б. Я. О спекании (в твердой фазе). ЖТФ, **16**, 747, 1946.
5. Пинес Б. Я. Спекание, крип, отдых, рекристаллизация и другие явления, обусловленные самодиффузией в кристаллических телах, УФН, **52**, 501, 1954.
6. Пинес Б. Я., Гегузин Я. Е. Самодиффузия и гетеродиффузия в неоднородных пористых телах, ЖТФ, **23**, 1559, 1953.
7. Пинес Б. Я., Гегузин Я. Е. К кинетике спекания спрессованных металлических порошков. ЖТФ, **23**, 2078, 1953.
8. Полубояринов Д. Н., Грачева О. М. Влияние гранулометрического состава шамота на качество готовой продукции, Труды ВИОК, вып. 11, 1934.
9. Большая Советская Энциклопедия. Второе издание, том **23**, стр. 425.